

## УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРУКТУРНО-НЕУСТОЙЧИВОГО ГЛИНИСТОГО ГРУНТА

**А. Г. ШАШКИН** – канд. техн. наук, член РОМГГиФ, генеральный директор НПО «Геореконструкция–Фундаментпроект», г. Санкт-Петербург.

**К. Г. ШАШКИН** – канд. техн. наук, член РОМГГиФ, ведущий специалист НПО «Геореконструкция–Фундаментпроект», г. Санкт-Петербург.

Рассматриваются механические модели работы грунта, получившие наибольшее распространение в международной практике расчетов основания. Анализируются недостатки этих моделей, проявляющиеся при описании поведения структурно-неустойчивых глинистых грунтов. Предлагается модификация модели упрочняющейся среды, адаптированная к особенностям поведения этих грунтов.

Традиционно для расчета осадок зданий используются инженерные или численные методы, основанные на соотношениях теории упругости. К таким методам относятся изложенные в СНиП 2.02.01–83\* методы послойного суммирования и линейно-деформируемого слоя. Основным параметром методов, основанных на соотношении теории упругости, является модуль деформации. Для его определения обычно применяются компрессионные испытания. При расчете модуля вводится повышающий эмпирический коэффициент, определенный из сопоставления результатов компрессионных и натуральных штамповых испытаний. Следует отметить, что такое сопоставление не вполне корректно: при компрессионных испытаниях градиенты напора в поровой воде значительно выше, чем при штамповом, в связи с чем при испытании глинистых грунтов штампом преобладают деформации сдвига, а не компрессионного уплотнения. Более подробный анализ штамповых испытаний глинистых грунтов приведен в статье [1].

В простейших упруго-пластических моделях в расчет дополнительно вводятся прочностные характеристики грунтов. Эти модели позволяют учесть нелинейный характер деформирования основания при увеличении нагрузки. Критерий предельного состояния в этом случае выглядит в виде некоторой по-

верхности в пространстве главных напряжений, ограничивающей области возможных напряжений для данного материала. В механике грунтов наиболее часто используется предельная поверхность, определяемая критерием Кулона-Мора (рис. 1).

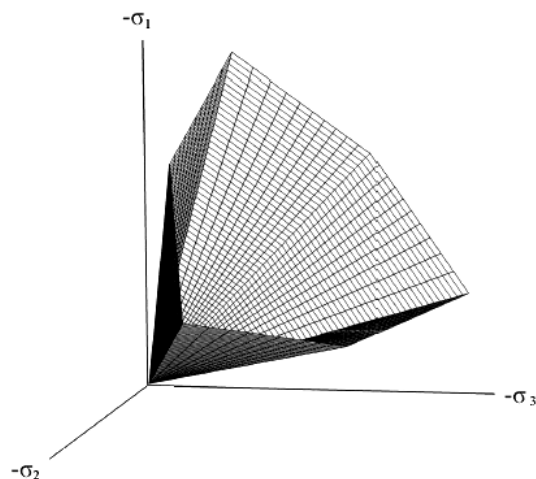


Рис. 1. Предельная поверхность, определяемая критерием Кулона-Мора

Достоинством подобной модели является использование традиционных параметров (модуля деформации, удельного сцепления и угла внутреннего трения), получаемых в стандартных инженерно-геологических изысканиях. К недостаткам относятся игнориро-

вание нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями при сжатии в компрессионных условиях, а также допущение о равенстве модулей деформации на стадиях нагрузки и разгрузки.

Следствием первого недостатка является отсутствие локализации деформаций с глубиной, что противоречит опытным данным. При расчете осадок зданий модель требует введения ограничения сжимаемой толщи, как в инженерных методах (в противном случае величина осадки оказывается сильно завышенной).

Второй недостаток приводит к аномально большим расчетным значениям поднятия дна котлованов при глубоких выработках. Это ограничивает возможность применения модели Кулона–Мора при расчете ограждающих конструкций котлованов.

Для более корректного учета нелинейных свойств грунтов в мировой расчетной практике используются так называемые шатровые, или упрочняющиеся модели. Для таких моделей упругая область в пространстве главных напряжений ограничена не только некоторой предельной поверхностью (например, описываемой критерием Кулона–Мора), но и криволинейной выпуклой поверхностью «шатра». Использование упрочняющихся моделей позволяет учитывать изменение модуля деформации по глубине для нормально уплотненных и переуплотненных грунтов и тем самым избавиться от искусственного ограничения сжимаемой толщи.

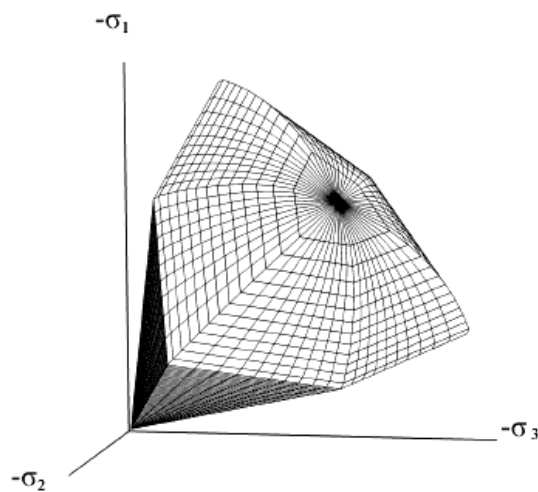


Рис. 2. Пример предельной поверхности для шатровых моделей

В классической упрочняющейся модели Cam-Clay, изложенной в работах К. Н. Roscoe and J. В. Borland [2], в качестве поверхности нагружения принимается эллиптическая поверхность, обоснованная энергетически и определяемая достаточно простым уравнением. Согласно концепции критического состояния, поверхность нагружения в координатах главных напряжений соответствует одинаковым объемным пластическим деформациям грунта при различных сочетаниях напряжений, действующих на элемент среды.

Предполагается, что упрочнение грунта имеет изотропный характер, а в качестве параметра упрочнения принимается величина накопленных объемных пластических деформаций.

Линия критического состояния в координатах инвариантов тензора напряжений представляет собой прямую линию с уравнением

$$\tau = Mp, \quad (1)$$

где  $\tau = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ ;  $p$  – среднее напряжение.

Деформации грунта полностью обратимы, если уровень напряжений, действующих на элементарный объем грунта, не выходит за пределы поверхности нагружения, ограничивающей зону I на рис. 3. Активное нагружение грунта за пределы упругой зоны приводит к развитию как обратимых, так и необратимых деформаций, а также к изменению положения поверхности нагружения (рис. 3). В соответствии с правилом Койттера предполагается, что вектор пластических деформаций  $\epsilon_p$  направлен перпендикулярно поверхности нагружения, т. е. последняя является поверхностью пластического потенциала.

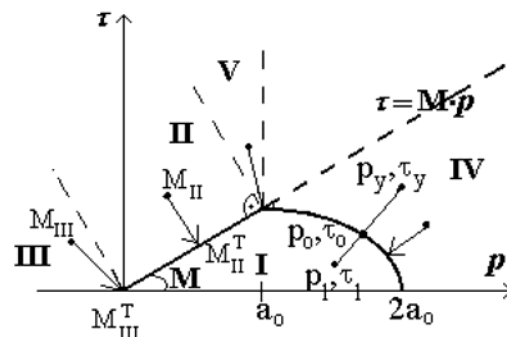


Рис. 3. Определение теоретических напряжений при постановке задачи в рамках классической модели Cam-Clay

Таким образом, область упругих деформаций грунта  $I$  (см. рис. 3) будет ограничена предельной прямой с уравнением (1) и эллиптической поверхностью нагружения с уравнением

$$F = \frac{(p - a_0)^2}{a_0^2} + \frac{\tau^2}{a_0^2 M^2} = 1 \quad (2)$$

или

$$a_0 = \frac{p^2}{2} + \frac{\tau}{2pM^2}. \quad (3)$$

Для решения физически нелинейной задачи при использовании метода конечных элементов выбран метод «начальных напряжений», сущность которого состоит в следующем. Пусть график зависимости напряжений и деформаций имеет некоторое криволинейное очертание (рис. 4).

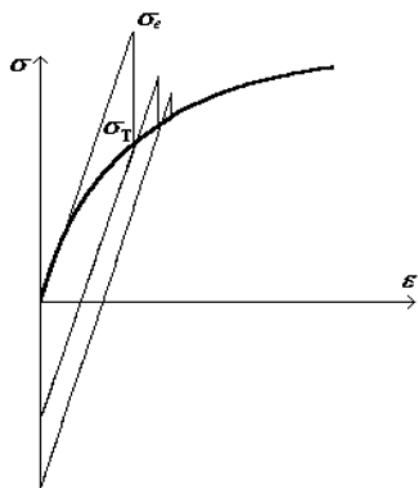


Рис. 4. Реализация физически нелинейных моделей методом начальных напряжений

В результате линейно-упругого решения могут быть определены «упругие» напряжения  $\sigma_\epsilon$ , значения которых отличаются от реальных («теоретических») напряжений  $\sigma_t$ , которые имела бы среда при рассчитанном уровне деформаций. Разница между «упругими» и «теоретическими» напряжениями рассматривается как невязка и прикладывается к системе конечных элементов в виде дополнительных узловых сил. В результате повторного упругого решения с новым векто-

ром узловых сил «упругие» напряжения окажутся ближе к «теоретическим». Новая невязка добавляется к системе конечноэлементных уравнений и итерационная процедура продолжается до тех пор, пока разница между «упругими» и «теоретическими» напряжениями не будет превышать заданной точности. Величина «теоретических» напряжений определяется моделью грунта.

Величину объемной пластической деформации можно с достаточной точностью аппроксимировать зависимостью

$$\epsilon_{vp} = B \cdot \ln \left( \frac{p}{p_0} \right). \quad (4)$$

Параметр  $M$  в формуле (1) связан с углом внутреннего трения следующей зависимостью:

$$M = 2\sqrt{3} \frac{\sin\phi}{3 - \sin\phi}.$$

Недостатком классической модели Cam-Clay является отсутствие учета сцепления для глинистых грунтов, обусловленного предыдущим уплотнением. Самой простой модификацией модели для учета этого фактора является перемещение области упругой работы грунта на величину  $c \cdot \text{ctg}\phi$ . Такой подход, например, использован в известной геотехнической программе PLAXIS. В мировой расчетной практике существует множество других модификаций упрочняющейся модели, однако их применение затруднено необходимостью выполнения нестандартных лабораторных испытаний грунтов для построения поверхности пластического потенциала.

Следует отметить, что упрочняющиеся модели, как правило, предполагают, что грунт в основании сооружений является нормально уплотненным или переуплотненным. В таких условиях сопротивление сдвигу должно возрастать с глубиной. В то же время натурные испытания крыльчаткой, выполненные на различных площадках Санкт-Петербурга, показывают, что при глинистых грунтах сопротивление сдвигу с глубиной в пределах одного инженерно-геологического элемента практически не возрастает [1]. Многочисленные данные статического зондирования на различных площадках Санкт-Петербурга

также свидетельствуют об отсутствии увеличения сопротивления зондированию с глубиной в пределах одного инженерно-геологического элемента для слабых глинистых грунтов. Гипотезе нормального уплотнения грунтов не соответствуют также кривые компрессионных испытаний слабых грунтов Санкт-Петербурга, на которых в подавляющем большинстве случаев не прослеживается так называемая структурная прочность.

В классической механике грунтов наличие «недоуплотненных» отложений на большой глубине можно объяснить тем, что отток воды из порового пространства крайне затруднен, в результате имеет место остаточное поровое давление, а эффективные напряжения составляют лишь долю от общего давления на данной глубине.

Другим недостатком классических моделей типа Cam-Clay является уменьшение сопротивления сдвигу в глинистых грунтах при снятии давления и его обратное возрастание при повторном нагружении в неконсолидированно-недренированных условиях. Многочисленные стабилометрические испытания, выполнявшиеся под руководством проф. Р. Э. Дашко [3], показывают, что в таких условиях величина сопротивления сдвигу водонасыщенных глинистых грунтов, характерных для Санкт-Петербурга, практически не зависит от объемных напряжений (угол внутреннего трения составляет около  $2...5^\circ$ ). Физически такое поведение грунтов вполне объяснимо: в глинистых грунтах сопротивление сдвигу зависит от прочности водно-коллоидных связей и количества контактов частиц (с их водно-коллоидными оболочками) друг с другом, а не от величины трения на этих контактах. Количество контактов, очевидно, связано с плотностью (пористостью) грунта, которая для полностью водонасыщенных грунтов в *недренированных* условиях практически не изменяется при увеличении или уменьшении полных объемных напряжений.

Кроме того, не вполне соответствует опыту поведение стандартных упрочняющихся моделей при сдвиге. Криволинейную зависимость между сдвиговыми деформациями и касательными напряжениями можно получить только при пересечении траектории

нагружения с криволинейной поверхностью «шатра». При этом зависимость между напряжениями и деформациями полностью определяется видом поверхности нагружения, т. е. видом «шатра». При разгрузке и повторном нагружении по траектории, выходящей за пределы упругой области, но не пересекающей криволинейную поверхность «шатра», поведение модели будет аналогичным поведению модели идеальной упругопластической среды (диаграмме Прандтля). В реальных опытах при приложении девиатора напряжений деформации практически всегда носят нелинейный характер, при этом остаточные деформации наблюдаются даже при сравнительно небольших напряжениях.

Несоответствие поведения модели опыту при девиаторном нагружении может отрицательно сказаться на моделировании реальных геотехнических ситуаций. Отсутствие нелинейных сдвиговых деформаций на части траектории нагружения может привести к общей недооценке величины деформаций в пределах всей расчетной схемы. Это особенно существенно при расчете глинистых грунтов с низкими коэффициентами фильтрации, в которых объемные деформации будут протекать в течение длительного периода времени. Основную роль в поведении таких грунтов в период строительства и первых лет эксплуатации играют деформации сдвига.

Для устранения описанных противоречий нами разработана модификация упрочняющейся упругопластической модели грунта, более корректно отражающая особенности поведения слабых глинистых грунтов, характерных для инженерно-геологических условий Санкт-Петербурга.

Одной из основных проблем при построении шатровых моделей является определение по результатам экспериментов конфигурации области упругих деформаций (конфигурации «шатра»). Отметим, что разделение деформаций на упругие и пластические в большинстве случаев весьма условно. В связи с этим перспективным представляется использование экспериментальных нелинейных зависимостей не только для объемных, но и для сдвиговых деформаций. Принцип построения такой модели изображен на рис. 5.

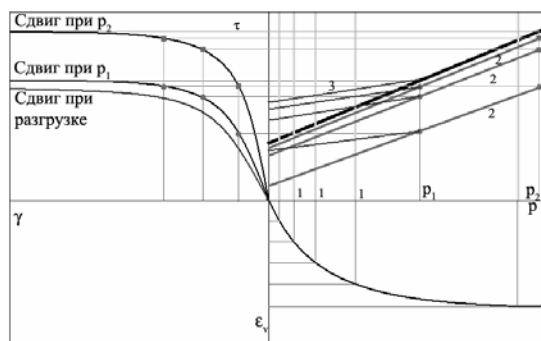


Рис. 5. Принцип построения упругопластической модели по аппроксимациям зависимостей  $\tau-\gamma$  и  $p-\epsilon_v$ : 1 – изолинии равных объемных деформаций; 2, 3 – изолинии равных деформаций сдвига соответственно на стадиях нагружения (2), разгрузки и повторного нагружения (3)

Для построения модели выполняется ряд стабилметрических испытаний по различным траекториям нагружения и строятся изолинии равных объемных и сдвиговых деформаций. Изолинии сдвиговых деформаций (на стадии нагружения) достаточно хорошо описываются системой линейных зависимостей, расстояние между изолиниями уменьшается с приближением к предельной прямой, соответствующей закону Кулона. Изолинии объемных деформаций (в общем случае нелинейные) описывают сжатие грунта при объемном нагружении и в компрессионных условиях. Искривление изолиний объемных деформаций происходит в случае зависимости объемных деформаций от сдвиговых напряжений (дилатансия).

Для слабых глинистых грунтов Петербурга дилатансия изучена недостаточно, хотя имеются свидетельства о незначительности этого эффекта. Поэтому для упрощения модели эти изолинии аппроксимируются вертикальными прямыми (дилатансия не учитывается). При нагружении образца объемными напряжениями увеличение сопротивления сдвигу связано с уплотнением грунта и увеличением количества контактов между его частицами. При разгрузке плотность грунта изменяется незначительно и не приводит к существенному уменьшению сопротивления сдвигу, как в традиционных шатровых моделях. Изолинии равных деформаций сдвига при разгрузке изображены на рис. 5 (семейство прямых 3). Наклон изолиний соответствует

углу внутреннего трения, наблюдаемому в неконсолидированно-недренированных испытаниях.

При построении упругопластической модели используем традиционное разделение деформаций на упругие и пластические  $\epsilon_v = \epsilon_{ve} + \epsilon_{vp}$ ;  $\gamma = \gamma_e + \gamma_p$ . Для аппроксимации зависимости  $p-\epsilon_{vp}$  удобно использовать формулу, близкую к выражению (4), но учитывающую отсутствие начального более пологого участка компрессионной кривой:

$$\epsilon_{vp} = B \cdot \ln \left( \frac{p + p_0}{p_0} \right). \quad (5)$$

Параметры  $B$  и  $p_0$  могут быть приближенно получены из компрессионных испытаний грунтов.

Аппроксимация зависимости  $\tau-\gamma$  при  $\tau < c$  может осуществляться степенной функцией [4]:

$$\gamma_p = A \tau^n.$$

Параметр  $A$  удобно определять через выражение

$$A = \frac{\gamma_c}{\tau_{lim}^n}, \quad (6)$$

где  $\gamma_c$  – деформация, которая соответствует пределу прочности на сдвиг.

Для моделирования работы грунтов при возможности оттока поровой воды следует объединить упругопластическую модель с задачей фильтрационной консолидации. Для решения упругопластических задач, основанных на теории пластического течения, необходима запись уравнений равновесия и неразрывности потока в приращениях перемещений. При использовании метода конечных элементов эти уравнения записываются в виде

$$\begin{cases} [K]\{du\} + [C]\{dp\} = \{df\} \\ [C]^T \{du\} - dt[K_f]\{p\} - \frac{n}{K_w}[E]\{dp\} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости элемента;  $[C]$  – «стыковочная» матрица;  $[K_f]$  – матрица фильтрационных свойств грунта;  $(n/K_w)[E]$  – матрица сжимаемости поровой жидкости, зависящая

от пористости и модуля сжатия воды;  $\{du\}$  – вектор приращения перемещений;  $\{dp\}$  и  $\{p\}$  – приращение и величина порового давления;  $\{df\}$  – приращение внешней нагрузки.

При использовании разностной схемы для шага по времени  $i$  можно записать

$$\begin{cases} [K]\{\Delta u\} + [C]\{p_i\} = \{\Delta f\} + [C]\{p_{i-1}\}, \\ [C]^T \{\Delta u\} - \Delta t [K_f] \{p_i\} - \frac{n}{K_w} [E]\{p_i\} = \\ = -\frac{n}{K_w} [E]\{p_{i-1}\}. \end{cases} \quad (8)$$

Реализации моделей, основанные на выражениях (8), успешно применяются при решении плоских задач с небольшим количеством узлов [5]. Однако при решении сложных задач большой размерности запись уравнений в виде (8) отличается негативными математическими свойствами. Матрица системы для такой задачи не является положительно определенной и содержит отрицательные элементы на главной диагонали, что ограничивает возможность применения эффективных алгоритмов линейной алгебры. Кроме того, матрица объединяет в одно решение неизвестные перемещения и давления, т. е. реализует фактически смешанный метод решения. Элементы матрицы могут различаться по величине на несколько порядков, что ухудшает обусловленность системы.

Поэтому для решения задач большой размерности целесообразно раздельное решение уравнений равновесия и неразрывности потока с последующим объединением в итерационном процессе по следующей схеме:

$$\begin{cases} ([K] + [D_w]) \{\Delta u\} = \{\Delta f\} - [C] (\{p_{i-1}\} - \{p_i^*\}) + \\ + [D_w] \{\Delta u^*\}, \\ \left( \Delta t [K_f] - \frac{n}{K_w} [E] \right) \{p_i\} = [C]^T \{\Delta u\} + \\ + \frac{n}{K_w} [E] \{p_{i-1}\}. \end{cases} \quad (9)$$

где звездочкой обозначены векторы перемещений и поровых давлений на предыдущей итерации.

При решении упругопластической задачи такие итерации могут выполняться параллельно с итерациями метода начальных напряже-

ний. Для схем большой размерности решение задачи фильтрационной консолидации по итерационной схеме (9) оказывается более выгодным по времени, чем решение плохо обусловленных задач по схеме (8).

Для корректного описания деформирования грунта во времени необходимо, кроме задачи фильтрационной консолидации, описать процесс развития во времени сдвиговых деформаций. Наиболее простой моделью для такого описания является модель Бингама–Шведова.

При решении методом начальных напряжений вязкопластическое поведение модели грунта может быть реализовано по следующему принципу:

$$\tau_T^* = \tau_e - \frac{G\Delta t}{\eta} (\tau_e - \tau_T), \quad (10)$$

где  $\tau_T^*$  – «теоретический» девиатор напряжений на данном шаге по времени;  $\tau_e$  – «упругие» напряжения, полученные при решении линейной задачи;  $\tau_T$  – «теоретические» напряжения, соответствующие уровню деформаций без учета фактора времени;  $\eta$  – вязкость на стадии установившейся ползучести.

В общем случае вязкость не является постоянной величиной: стадия установившейся ползучести рано или поздно переходит в стадию прогрессирующей ползучести, для которой характерны значительно большие скорости деформаций и, соответственно, меньшая вязкость. Согласно предложению Н. Н. Маслова, изменение вязкости во времени можно записать уравнением

$$\eta(t) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) \exp(-\mu t). \quad (11)$$

Зависимость вязкости от времени в выражении (11), очевидно, определяется конкретными условиями эксперимента (величиной напряжений и т. д.). Физически оправданной представляется запись зависимости изменения вязкости от работы пластических деформаций  $W$ , которая приводит к разрушению структурных связей и расструктурированию грунта:

$$\eta(t) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) \exp(-kW). \quad (12)$$

При этом параметр  $k$  подбирается таким образом, что при совершении некоторой «работы расструктурирования»  $W_{str}$  вязкость снижается до величины  $\eta_\infty$ .

Если упрощенно представить функцию изменения вязкости ступенчатой (описывающей резкий переход от начальной вязкости к вязкости расструктуренного грунта), то деформация будет происходить с постоянной скоростью

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau - c}{\eta_0}$$

до момента совершения работы

$$W_{str} = \tau\gamma = \tau \frac{\tau - c}{\eta_0} t. \quad (13)$$

Тогда величина временного сопротивления в зависимости от времени будет описываться выражением

$$\tau = \frac{1}{2} \left( c + \sqrt{c^2 + 4 \frac{W_{str} \eta_0}{t}} \right). \quad (14)$$

Характер зависимости величины временного сопротивления от времени (рис. 6) соответствует опытным данным С. С. Вялова и Н. К. Пекарской [6], а также многих других исследователей.

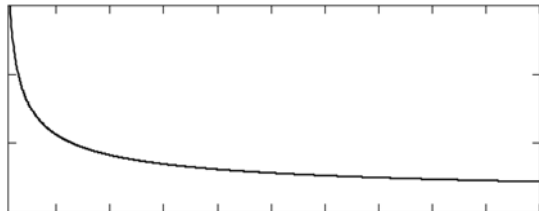


Рис. 6. Зависимость временного сопротивления от времени по выражению (14)

При учете переменной вязкости грунта, зависящей от работы пластических деформаций, характер зависимости  $\tau-\gamma$  при постоянной скорости деформаций и характер зависимости деформаций от времени при постоянных напряжениях хорошо согласуется с опытными данными (рис. 7, 8).

Таким образом, описание нелинейной вязкости в соответствии с выражением (12) позволяет моделировать основные эффекты, характерные для поведения глинистых грунтов при сдвиговом деформировании. Параметр  $W_{str}$  в выражении (12) может быть приближенно получен из величины временного сопротивления по формуле (13).

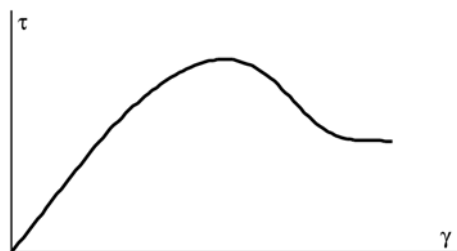


Рис. 7. Характер зависимости  $\tau-\gamma$  при постоянной скорости сдвиговой деформации и моделировании переменной вязкости по выражению (12)

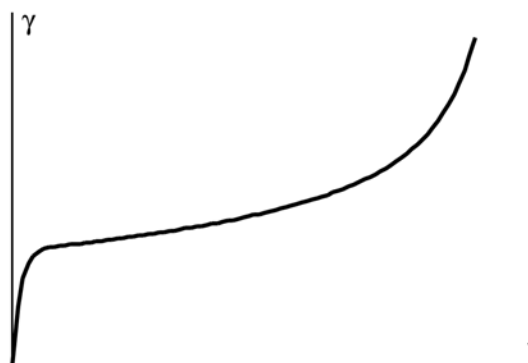


Рис. 8. Характер зависимости  $\gamma-t$  при постоянном напряжении сдвига и моделировании переменной вязкости по выражению (12)

В целом модель, объединяющая решение упруго-вязко-пластической задачи и задачи фильтрационной консолидации, является достаточно универсальной и позволяет решать широкий спектр задач геомеханики. При назначении нулевых начальных и конечных вязкостей задача сводится к обычной упруго-пластической задаче без рассмотрения поведения во времени. При назначении нулевого коэффициента фильтрации для глинистых грунтов модель позволяет решать задачи, связанные с деформированием грунта в течение короткого промежутка времени, в пределах которого процессы фильтрационной консолидации не успевают проявиться. Наоборот, при назначении близкого к нулю модуля сжимаемости поровой жидкости можно получить модель, описывающую конечную стадию деформации после завершения процессов консолидации.

Нелинейные функции  $\tau-\gamma$  и  $p-\varepsilon_v$ , аппроксимирующие испытания грунта на сдвиг и компрессионное сжатие, позволяют добиться

близкого соответствия опыта и моделирования эксперимента с помощью предлагаемой упрощенной модели (рис. 9).

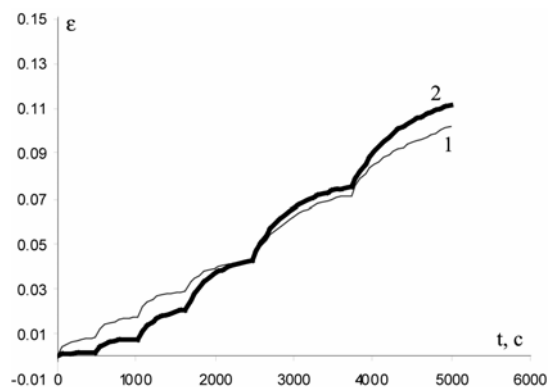


Рис. 9. Сопоставление результатов стабилметрических испытаний озерно-ледникового суглинка (опыты Р. Э. Дашко) с моделированием эксперимента: 1 – опытные данные; 2 – расчет по предлагаемой модели

При нулевом параметре  $\gamma_c$  в выражении (6) поведение при сдвиге соответствует модели идеальной упругопластической среды, при высоких начальных («упругих») модулях сдвига поведение такой модели будет стремиться к жесткопластическому. Физически такое поведение соответствует относительно «быстрым» деформациям, проявляющимся при потере устойчивости основания, образовании поверхностей скольжения, потере устойчивости склонов и т. д. При увеличении параметра  $\gamma_c$  секущий модуль сдвига будет понижаться, а роль сдвиговых деформаций при напряжениях ниже предела прочности в решении задач будет возрастать. В этом случае модель позволяет описать длительные

деформации ползучести, происходящие в основании зданий на слабых грунтах.

Таким образом, рассмотренная модель позволяет описать основные особенности работы широкого спектра слабых глинистых грунтов, используя параметры свойств, определяемые по стандартным методикам испытаний.

### Список литературы

1. Шашкин А. Г., Шашкин К. Г., Васенин В. А. Особенности расчета фундаментов высотных зданий с учетом работы надземных конструкций в инженерно-геологических условиях Санкт-Петербурга // Реконструкция городов и геотехническое строительство. 2005. №9.
2. Roscoe K. H., Burland J. B. On the generalized Stress-Strain Behaviour of «Wet» Clay // Cambridge Univ. press. Heyman, Leskie, Eds. 1968.
3. Анализ геотехнических и геоэкологических условий строительства площадки проектируемого высотного здания «Петр Великий» (устье р. Смоленки, правый берег) / Спб. гос. горный ин-т им. Г. В. Плеханова.
4. Пармонов В. Н. Решение задач фильтрационной консолидации с учетом ползучести скелета грунта методом конечных элементов // Реконструкция городов и геотехническое строительство. 1999. № 1.
5. Вялов С. С. Реологические основы механики грунтов: Учеб. пособие для строительных вузов. М.: Высш. школа, 1978.
6. Вялов С. С., Пекарская Н. К. Исследование длительной прочности глинистых грунтов // Материалы всесоюзного совещания по строительству на слабых водонасыщенных глинистых грунтах. Таллин, 1965.