



## ДВУХМЕРНАЯ ЭВОЛЮЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОВЛАГОПЕРЕНОСА В ГРУНТОВОМ ОСНОВАНИИ

**В. А. КУЛЬЧИЦКИЙ, В. А. МАКАГОНОВ** – Научно-производственное объединение «Прогрестех», г. Москва.

Представлена двухмерная математическая модель тепловлагоденоса в нелинейной постановке для изотропных грунтов. При этом расчетная область является многослойной системой, в слоях которой теплопроводнo-физические характеристики грунтов различны, и процессы переноса в них тепла и влаги, замораживания и оттаивания рассматриваются в динамике, т. е. с учетом изменения во времени и в пространстве и при наличии фазовых переходов. Граничные условия на поверхности грунта моделируются в зависимости от температуры и влажности окружающей среды. Предложены метод и алгоритм эффективного решения поставленной задачи.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В механике грунтов при расчетах несущей способности оснований встречаются случаи, когда необходимо учитывать физические параметры грунтов в зависимости от их температуры и влажности в годовом цикле изменения внешних условий. Для этого предварительно получают решение задачи о температурных и влажностных полях в основаниях, чтобы иметь картину состояния грунтов, образующих основание, для любой точки и в любой отрезок времени, в том числе при их переувлажнении, замерзании, оттаивании и т. д.

Для большей части конструктивных элементов достаточно задачу о температурно-влажностных полях решать в одномерной постановке, и такие решения известны. Однако на практике не исключены случаи, когда задачи механики грунтов необходимо рассматривать в двухмерной постановке. Это же относится к проблеме исследования процессов тепломассопереноса. Такие задачи являются одними из самых сложных в строительной физике, поэтому представляют для исследователей и специалистов определенный практический и научный интерес.

© В. А. Кульчицкий, В. А. Макагонов, 2004

Ниже рассматривается нелинейная двухмерная математическая модель тепломассопереноса в многослойном грунтовом основании. Модель, которая включает процессы переноса тепла и влаги, замораживания и оттаивания грунта в динамике, мы назовем «эволюционной» – в смысле постоянного изменения всех параметров модели во времени и пространстве.

Уравнения тепло- и влагопереноса для рассматриваемой области запишем отдельно для теплопроводности и влагопереноса.

#### 1.1. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_T \frac{\partial T}{\partial y} \right) = c_m \frac{\partial T}{\partial t} - L_f \frac{c_i}{c_w} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (c_w v_x T) + \frac{\partial}{\partial y} (c_w v_y T), \quad (1)$$

где  $T$  – температура;  $x, y$  – текущие координаты;  $t$  – текущее время;  $k_T$  – коэффициент теплопроводности грунто-водоледяной смеси;  $c_m$  – коэффициент теплоемкости грунтоводоледяной смеси;  $L_f$  – объемная теплота фазового перехода для воды;  $\rho_i, \rho_w$  – плотность льда и воды;  $c_w$  – теплоемкость воды;  $v_x, v_y$  – скорость потока влаги по направлению  $x, y$  соответственно;  $\theta_i$  – объемное содержание льда в единице объема;  $\theta_i + \theta_w + \theta_s + \theta_a = 1$ ;

$\theta_i + \theta_w + \theta_a = 1 - \theta_s = \theta_0$  – доля поровости;  $\theta_w$ ,  $\theta_s$ ,  $\theta_a$  – доли воды, скелета грунта и воздуха.

Грунт считаем изотропным. Коэффициент теплопроводности  $k_T(x, y)$  принимаем зависящим от вида грунта, количества жидкой воды и льда. В расчетах он усредняется по части пространства, которое назовем «контрольным объемом». Для вычисления  $k_T$  можно использовать формулы Керстена или более точные формулы Рая [1].

При решении одномерной задачи тепло-влажностного переноса Громаткой и Гаймоном [2, 3] использовалась формула де Фриза:

$$k_T = \frac{k_i \theta_i + k_w \theta_w + k_s \theta_s}{1 - \theta_0}; \quad \theta_s = 1 - \theta_0. \quad (2)$$

Коэффициент теплоемкости грунто-водо-ледяной смеси  $c_m$  считаем зависимым от удельного состава смеси. Усредняя его по контрольному объему, запишем

$$c_m = \frac{c_i \theta_i + c_w \theta_w + c_s (1 - \theta_0)}{1 - \theta_a}, \quad (3)$$

где  $c_i$  – теплоемкость льда.

Объемную теплоту фазового перехода воды принимаем постоянной ( $L_f = \text{const}$ ). В расчетах полагаем, что  $\rho_i = 0,9 \text{ г/см}^3$ ;  $\rho_w = 1 \text{ г/см}^3$ ;  $c_i$ ,  $c_w$ ,  $c_s$ ,  $\theta_0$  – константы;  $v_x$ ,  $v_y$  считаются квазипостоянными в контрольном  $\bar{v}$  объеме. Поток влаги не будем раскладывать на координатные составляющие. Вычислим его при решении влажностной задачи.

Запишем начальные и граничные условия для уравнения теплопереноса (1).

В начальный момент времени температуру в рассматриваемой ограниченной плоскости считаем известной:

$$T(t=0) = T_0(x, y). \quad (4)$$

На боковых сторонах прямоугольника

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0. \quad (5)$$

Это следует из симметрии задачи на левом конце и вырождения в одномерность на правом. На нижней границе прямоугольника,

т. е. при  $y=L$ , температура на достаточной глубине известна:

$$T \Big|_{y=L} = T_0(x). \quad (6)$$

Поскольку процесс переноса тепла затухает на глубине, запишем

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L} = 0. \quad (7)$$

На верхней границе при  $y=0$

$$T \Big|_{y=0} = NT_a(s, t), \quad t > 0. \quad (8)$$

Выражение (8) представляет собой скорректированную для поверхности грунта температуру атмосферы;  $s$  – тангенциальная координата точки на поверхности, которая учитывает рельеф местности.

### 1.2. Уравнение влажностного переноса

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_i \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial \theta_w(\psi)}{\partial t} + \frac{\rho_i}{\rho_w} \frac{\partial \theta_i}{\partial t}, \quad (9)$$

где  $\frac{\partial \theta_w(\psi)}{\partial t} = \theta^* \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ ;  $\psi$  – поровое давление;

$\Phi = \psi - y$  – полный гидравлический напор;  $k_H(x, y)$  – коэффициент влажностного переноса;  $\theta^*$  – влажностная теплоемкость;  $\theta_i$  – объемное содержание льда;

$v_x = -k_i \frac{\partial \Phi}{\partial x}$  – скорость потока влаги по оси  $x$ .

В уравнении (9) коэффициенты  $k_H$  и  $k_0$  для влаги определяются выражениями

$$k_i = k_i(\psi) = \frac{k_0}{1 - A_k \psi^3}, \quad \psi < 0; \quad (10)$$

$$k_i = k_0, \quad \psi \geq 0,$$

где  $A_k$  зависит от вида грунта.

Пересчитаем через  $\psi$  объемную влажность и влажностную теплоемкость:

$$\theta = \frac{\theta_0}{1 - A_w \psi^3}, \quad \psi < 0; \quad (11)$$

$$\theta = \theta_0, \quad \psi \geq 0,$$

$$\theta^* = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = \frac{3\theta_0 \psi^2 A_w}{(1 - A_w \psi^3)^2} = \frac{3A_w}{\theta_0} [\psi \theta(\psi)]^2, \quad \psi < 0; \quad (12)$$

$$\theta^* = 0, \quad \psi \geq 0.$$

Для промерзающего грунта вследствие изменения физических свойств коэффициент влагопроводности домножаем на корректирующий множитель, учитывающий количество льда в грунте:

$$k_i = k_i(\psi) \left( \frac{1}{1 + c\theta_i} \right), \quad (13)$$

где  $c$  зависит от вида грунта.

Запишем начальные и граничные условия для уравнения влагопереноса.

При  $t = 0$  распределение  $\psi$  считаем известным:

$$\psi(t=0) = \psi_0(x, y). \quad (14)$$

При  $x = 0, x = L$ , т.е. на боковых сторонах прямоугольника

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0, L} = 0. \quad (15)$$

При  $y = 1$  (нижняя граница): если за нижнюю границу принимается уровень грунтовых вод, то

$$\psi \Big|_{y=L} = 0 \Leftrightarrow \Phi = -1; \quad (16)$$

если известно распределение влаги на глубине  $y = 1$ , соответствующее начальному распределению, то

$$\psi \Big|_{y=1} = \psi_0(x); \quad (17)$$

если нет перемещений влаги на глубине, то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0. \quad (18)$$

При  $y = 0$  (верхняя граница) допускаем, что покрытие непроницаемо для влаги. Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \quad (19)$$

Если учитывать, что идет дождь или тает снег, и известно, какое количество воды должно поступать на открытые участки рас-

сматриваемой области, то можно задавать  $\psi = \Phi \Big|_{y=0} = 0$ .

Это означает, что верхний слой всегда водонасыщен. Давление слоя воды на поверхности не учитывается, иначе надо записать  $\psi = c(t) > 0$ . При этом нужно знать время выпадения осадков или время таяния снега, чтобы вовремя изменить это условие. Процесс выпадения осадков может моделироваться и потоковыми условиями, если известно, сколько миллиметров воды выпадает за сутки. Испарение в первом приближении можно не учитывать исходя из того, что этот процесс охватывает только верхний слой грунта. Тогда процесс инфильтрации воды более интенсивен, чем процесс испарения. В этом случае, если осадков нет, то полагаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0.$$

### 1.3. Уравнение общего вида, совмещающее тепло- и влагоперенос

Сформулировав постановку задач отдельно для теплопроводности и влагопереноса, запишем уравнение общего вида, используя лишь различия в коэффициентах переноса:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_1 \frac{\partial c}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (k_2 c) - \frac{\partial}{\partial y} (k_3 c) = k_4 \frac{\partial c}{\partial t}. \quad (20)$$

Имеем для задачи теплопереноса

$$c = T; \quad k_1 = k_T; \quad k_2 = c_w v_x; \quad k_3 = c_w v_y; \quad k_4 = c_m;$$

для задачи влагопереноса

$$c = \Phi; \quad k_1 = k_n; \quad k_2 = 0; \quad k_3 = 0; \quad k_4 = \theta^*.$$

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение подобных задач представляет определенную сложность в математическом плане даже при использовании методов конечных элементов или конечных разностей. Большие погрешности могут возникать при

выборе размеров и формы элементов, на которые разбивается исследуемая область.

Поиск эффективных математических методов для задач по тепломассопереносу – актуальная проблема. На наш взгляд, перспективным в этом плане является метод NDIM (Nodal Domain Integration Method), используемый в ряде областей науки [2, 3].

Предварительно рассмотрим область решения и схему конечного элемента (рис. 1). Область решения  $\Omega$  разбиваем на  $l$  треугольных конечных элементов так, чтобы

$$\Omega = \sum_1 \Omega_1, \quad (21)$$

где  $\Omega_1$  – конечный элемент.

В свою очередь, каждый конечный элемент  $\Omega_1$  разбивается точкой пересечения на три равные по площади части (см. рис. 1, б).

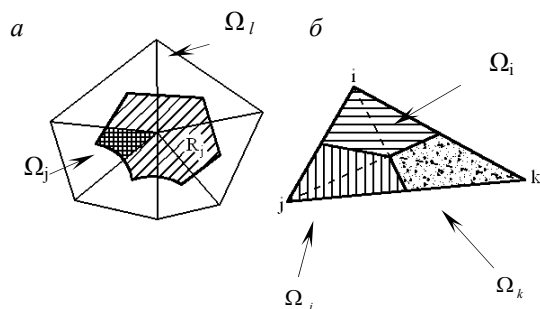


Рис. 1. Схема конечного элемента: а – область решения; б – конечный элемент

Выделенную область конечного элемента, примыкающую вершиной к узлу  $j$ , обозначим  $\Omega_j$ . Объединение всех  $\Omega_j$  как частей конечных элементов, имеющих общий узел  $j$ , образует полную область узла  $R_j$ .

По определению,

$$\Omega_j = \Omega_j^{(l)} = R_j \cap \Omega_1. \quad (22)$$

Область  $\Omega$  также полностью перекрывается областями  $R_j$ :

$$\Omega = \sum_j R_j. \quad (23)$$

Метод NDIM предполагает составление баланса массы или энергии не в точке, что определяется дифференциальным уравнением,

а в области конечных размеров. В данном случае под этими областями понимаются области узлов  $R_j$ . Поэтому уравнение баланса массы в операторном представлении в  $R_j$  является интегральным уравнением и имеет вид

$$\int_{\Delta t} \int_{R_j} [A(c) - f] ds dt = 0, \quad (24)$$

где  $[A(c) - f]$  – некоторая функция.

Для каждого из узлов  $j$ , в которых требуется определить неизвестную функцию  $c_j$ , составляем балансовое соотношение (24). Сколько неизвестных узлов, столько и уравнений. Используя какие-либо аппроксимации для  $c$ , которые строятся по значениям в дискретных точках, подставляя в уравнение (24) и интегрируя, получим линейное соотношение между значениями неизвестной  $c$  в узлах сетки. Число неизвестных и число уравнений совпадают. Линейную систему теперь можно решать одним из известных методов. Вычисление интеграла (24) разобьем на части по  $\Omega_j$ :

$$\int_{R_j} [A(c) - f] ds = \sum_1 \int_{\Omega_j^i} [A(c) - f] ds, \quad (25)$$

принадлежащие одному и только одному конечному элементу.

Фактически вычисление всех интегралов (по всем  $R_j$ ) сводится к вычислению интегралов по подобластям  $\Omega_j^i$  и их суммированию соответствующим образом. Поэтому удобно все интегралы по  $\Omega_j$  разбивать на тройки интегралов по подобластям  $\Omega_j^i$ , принадлежащим одному конечному элементу  $\Omega_1$ , после вычисления всех троек проводить соответствующее суммирование, формируя раскрытие интегральных соотношений для области  $R_j$ . Этот прием аналогичен построению элементарных частиц для каждого конечного элемента в МКЭ. Так как узлы  $i, j, k$  одного элемента ничем друг от друга не отличаются, то и вычисленные интегралы по  $\Omega_1^i, \Omega_1^j, \Omega_1^k$  должны отличаться с точностью до перестановки индексов. Вычисление интегралов выполним частями. Вначале обрабатываем член емкости, а затем – члены проводимости и конвекции, входящие в выражение (20).

Процедуру вычисления покажем на примере построения матрицы емкости, используя последний член выражения (20):

$$\int_{\Omega_j} k_4 \frac{\partial c}{\partial t} ds = k_4(l) \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_j} cds, \quad (26)$$

где  $k_4(l)$  – усредненное значение  $k_4(x, y)$  по конечному элементу  $\Omega_i, \Omega_j^1 \in \Omega_i$ . Его можно вынести за знак интеграла.

Допустим, что  $f_j(c_i, c_j, c_k, t)$  – аппроксимирующая функция для  $c$  в области  $\Omega_j$ . Используя идею введения параметра  $\eta(t)$  из одномерной задачи [4], можно записать

$$\int_{\Omega_j} cds = \int_{\Omega_j} f_j(c_{i,j,k}, t) ds \equiv \left[ \frac{\eta_j(t) c_j + c_i + c_k}{\eta_j(t) + 2} \right] \frac{A^{(l)}}{3}, \quad (27)$$

где  $A^{(l)}/3$  – площадь  $\Omega_j^1$ ;  $A^{(l)}$  – площадь  $\Omega_i$ .

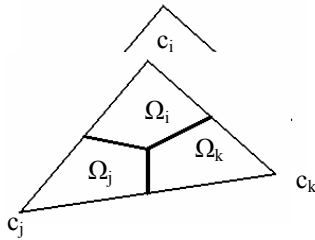


Рис. 2. К уравнению (27)

Аналогичные отношения будут иметь место для  $\Omega_i^1, \Omega_k^1$ .

Чтобы матрица емкости была симметричной, усредним значения  $\eta_j(t), j = i, j, k$ .

Положим

$$f_j(c_{i,j,k}, t) = f[\bar{\eta}(t), c_{i,j,k}] \text{ и } \bar{\eta}(t) = \frac{1}{3} \sum_j \eta_j(t), \quad (28)$$

$j = i, j, k.$

Тогда для конечного элемента  $\Omega_i$  получим симметричную матрицу емкости:

$$P^l[\bar{\eta}(t)] = \frac{k_4(l)A^{(l)}}{3[\bar{\eta}(t)+2]} \begin{bmatrix} \bar{\eta}(t) & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\eta}(t) & 1 \\ 1 & 1 & \bar{\eta}(t) \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Строки этой матрицы есть значения вычисляемых интегралов по подобластям  $\Omega_i^1, \Omega_j^1, \Omega_k^1$ . Значение  $k_4(l)$  в уравнении (29) является усредненным значением  $k_4(x, y)$  по оси  $\Omega_i$ . Однако оно будет более точным, если  $k_4(x, y)$  усреднять непосредственно по  $\Omega_j^1$ . Но тогда  $k_4$  в матрице будет вектором (каждая строчка матрицы умножается на свой коэффициент):

$$P^{(l)}[\bar{\eta}(t)] \{c_j\} = \frac{A^{(l)}}{3[\bar{\eta}(t)+2]} \begin{bmatrix} k_4(\Omega_i^1) \\ k_4(\Omega_j^1) \\ k_4(\Omega_k^1) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \eta & 1 & 1 \\ 1 & \eta & 1 \\ 1 & 1 & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{c}_i \\ \dot{c}_j \\ \dot{c}_k \end{Bmatrix}. \quad (30)$$

Можно показать, что значение  $\eta = 3$  соответствует в методе NDM линейным функциям  $c$  в конечных элементах;  $\eta = (-\infty; 2)$  – соответствуют КРМ и МКЭ.

Аналогичным образом можно получить матрицу проводимости конечного элемента:

$$K^{(l)} \{c_j\} = \frac{k_1^{(l)}}{4A^{(l)}} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_4 \\ p_2 & p_3 & p_5 \\ p_4 & p_5 & p_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \text{где } p_1 &= x_{23}^2 + y_{23}^2; & p_2 &= x_{31}x_{23} + y_{31}y_{23}; \\ p_3 &= x_{31}^2 + y_{31}^2; & p_4 &= x_{12}x_{23} + y_{12}y_{23}; \\ p_5 &= x_{12}x_{31} + y_{12}y_{31}; & p_6 &= x_{12}^2 + y_{12}^2 \end{aligned}$$

и матрицу конвекции

$$C^{(l)} = \frac{1}{4} c_w K_1^{(l)} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/L_1^2 \\ 1/L_2^2 \\ 1/L_3^2 \end{Bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_4 \\ p_2 & p_3 & p_5 \\ p_4 & p_5 & p_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}. \quad (32)$$

Теперь можно записать общее матричное уравнение для конечного элемента:

$$-K^{(l)} \begin{Bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_k \end{Bmatrix} - C^{(l)} \begin{Bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_k \end{Bmatrix} = P^{(l)}[\eta(t)] \begin{Bmatrix} \dot{c}_i \\ \dot{c}_j \\ \dot{c}_k \end{Bmatrix}. \quad (33)$$

Перед  $K^{(l)}$  стоит знак минус: если направление потока влаги или тепла совпадает с направлением нормали к границе, то матрица

$K^{(l)}$  положительна, но как раз этот случай соответствует «вытеканию» энергии и влаги, т.е. правая часть уравнения отрицательна (член накопления уменьшается). Так как матрицы  $C^{(l)}$  и  $K^{(l)}$  совпадают, то их коэффициенты можно объединить в один:

$$-\left[ K^{(l)} + C^{(l)} \right] \begin{Bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_k \end{Bmatrix} = P^{(l)}[\eta(t)] \begin{Bmatrix} \dot{c}_i \\ \dot{c}_j \\ \dot{c}_k \end{Bmatrix}. \quad (34)$$

Отметим, что вычисленная вторым способом матрица конвекции с точки зрения физики учитывает возможность переноса влаги из областей с разными температурами внутри области  $R_j$ , т.е. учитывает возможность внутреннего накопления энергии за счет разных скоростей течения жидкости в подобластях  $\Omega_j^1$ .

Полученную сумму необходимо проинтегрировать по времени  $\Delta t \leq t \leq 2\Delta t$ , чтобы вычислить балансовое отношение между притоком–оттоком и накоплением тепла и влаги за шаг  $\Delta t$ :

$$\int_{\Delta t}^{2\Delta t} c_j (K^{(l)} + C^{(l)}) dt = \int_{\Delta t}^{2\Delta t} \dot{c}_j P^{(l)}[\eta(t)] dt. \quad (35)$$

Предположим, что неизвестная величина  $c_j$  линейна по времени в интервале  $\Delta t \leq t \leq 2\Delta t$ , а  $c_j^1$  и  $c_j^2$  – начальное (известное) и конечное (неизвестное) состояния системы.

В квазистационарном случае коэффициенты в уравнениях можно выносить за временной интеграл. Тогда получаем

$$(K^{(l)} + C^{(l)}) \int_{\Delta t}^{2\Delta t} c_j dt = -P^{(l)} \int_{\Delta t}^{2\Delta t} \frac{\partial c_j}{\partial t} dt;$$

$$(K^{(l)} + C^{(l)}) \frac{c_j^1 + c_j^2}{2} \Delta t = -P^{(l)} (c_j^2 - c_j^1). \quad (36)$$

Далее производится формирование глобальной матрицы системы; составляются уравнения баланса переносимой массы и энергии для областей узлов, примыкающих к внешней границе (граничные условия); определяются итоговые выражения для записи элементарного матричного уравнения для конечного элемента; модифицируются фазовые переходы.

Одной из особенностей метода NDM является то, что он позволяет для различных аппроксимирующих функций выводить матричные уравнения, имеющие один структурный вид. Пример использования этого метода подробно излагается в работе [4].

### Список литературы

1. *Графики* теплопроводности для мерзлых грунтов. Vignava Bharathi. Т.6, №1. 1980. С. 27–36.
2. *Hromadka T. V. II, Guymon G. L., Berg R. L.* Some Approaches to Modeling Phase Change in Interesting Soils // Cold Reg. Sci and Technol. №4, 1981. P.137–145.
3. *Hromadka T. V. II, Guymon G. L., Berg R. L.* Sensitivity of a Frost Heave Model to the Method of Numerical Simulation // Cold Reg. Sci and Technol, V.6, №1. 1982. P. 1–10.
4. *Аэродромные покрытия.* Современный взгляд / В. А. Кульчицкий, В. А. Макагонов, Н. Б. Васильев, А. Н. Чеков, Н. И. Романков М.: Физ.-мат. литература, 2002. 528 с.